Министерство образования Республики Беларусь
Филиал УО «Брестский государственный технический университет»
Политехнический колледж

УТВЕРЖДАЮ
Зам. директора по УР
___________ С.В.Маркина
«___»__________20__г.

математика

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для выполнения домашних контрольных работ для учащихся специальности 2-39 02 02 «Проектирование и производство радиоэлектронных средств»
(код и название специальности)

заочная
(форма обучения)

2017

Разработала: Т.Г.Войтович, преподаватель филиала БрГТУ Политехнический колледж.

Методические указания разработаны на основании программы, утвержденной Министерством образования Республики Беларусь 2009 г., а также на основании общеобразовательного стандарта специальности.

Методические указания обсуждены и рекомендованы к использованию на заседании цикловой комиссии естественно-математических дисциплин.

Протокол № ___ от «____»_____________ 20___г.

Председатель цикловой комиссии___________ Е.Б. Литовчик.

СОДЕРЖАНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ

Современное состояние развития общества характеризуется математизацией и информатизацией всего научного знания. В условиях наукоемкости производства востребован творческий уровень образования специалистов. Обладая огромным эвристическим потенциалом, математика облегчает стратегические оценки широкого спектра задач, обеспечивает экономическое развитие общества.

Важность математического образования обусловлена еще и тем, что математика - неотъемлемая и существенная часть общечеловеческой культуры. Поэтому следует подчеркнуть большую роль математического образования при формировании общей культуры человека.

Математическое образование значимо не только для общественного прогресса, оно не менее актуально для непрерывного образования и личностного развития каждого человека. Уже по самой своей сути математика как дисциплина (в процессе ее изучения) способствует формированию абстрактного, логического, алгоритмического мышления учащихся. В условиях профессионального образования математические знания учащихся предстают как средство развития личности, как способ освоения определенной деятельности, в частности профессиональной.

Математике всегда принадлежало одно из ведущих мест в системе наук. И это не удивительно, так как математика и её методы вторгаются в нашу жизнь и необходимость их использования зримо ощущается инженерами, физиками, экономистами, биологами, криминалистами, организаторами производства. Важной причиной широкого применения математики сейчас является создание математических машин, взявших на себя большинство трудностей, мешавших ранее более широкому использованию математики из-за громоздкости расчётов. Научно-техническая революция, усиленный поток научной информации, математизация наук требуют постоянного совершенствования подготовки специалистов с современным математическим образованием. Стране нужны специалисты высокой квалификации, с широким теоретическим кругозором, способные быстро осваивать новое в науке и технике.

Основная задача предмета «Математика» для средних специальных учебных заведений состоит в том, чтобы дать учащимся комплекс математических знаний, умения и навыков, необходимых для изучения смежных и специальных дисциплин, для использования в практической деятельности, для формирования мировоззрения и развития логического мышления.

Данное пособие ставит своей целью оказание помощи учащимся заочных средних специальных учебных заведений в организации самостоятельной работы по овладению системой знаний, умений и навыков в объеме действующей программы.

2.ПРИМЕРНЫЙ ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

Тема	Количество учебных часов	
	Всего	В том числе на практические занятия
1. Введение в курс математики	10	6
2. Комплексные числа	4	2
3. Элементы линейной алгебры, векторной алгебры и аналитической геометрии	10	6
4. Функция. Предел последовательности и предел функции. Непрерывность функции	8	4
5. Дифференциальное исчисление функций одной и многих переменных	10	6
Обязательная контрольная работа (по темам 2-5)	1	
6 . Неопределенный и определенный интегралы	12	6
7. Дифференциальные уравнения	6	4
8 . Числовые и функциональные ряды. Ряды Фурье	10	6
Обязательная контрольная работа (по темам 6-8)	1	
9. Элементы комбинаторики, теории графов, теории вероятностей	8	6
Профессионально значимые темы	10-40	4-16
Итого	90-120	

3.ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Самостоятельная работа по овладению системой знаний, умений и навыков требует не только большого упорства, но и умения без которого затрата сил и времени не дает должного эффекта. Читать, понимать прочитанное и применять его на практике - вот в чем суть умения работать с учебными и методическими пособиями.

Считаем необходимым, чтобы Вы ознакомились с некоторыми практическими советами.

Прежде необходимо ознакомиться с содержанием примерного тематического плана и учебной программой. Затем рекомендуется выбрать в качестве основного учебник и учебное пособие и придерживаться их при изучении предмета, так как замена учебника может привести к утрате логической связи между отдельными вопросами.

Конспекты по предмету «Основы высшей математики» должны главным образом содержать определения, чертежи и выводы основных формул. Записи должны быть аккуратными. Они должны делаться для того, чтобы в дальнейшем ими можно было пользоваться.

Учитесь самоконтролю. Для учащегося-заочника это важнейшая форма проверки правильности понимания и усвоения программного материала.

Помните, что учебник нужно не просто читать, а изучать. Основой запоминания является понимание, знание забывается - понимание никогда. Повторение материала - важнейшее средство, предотвращающее забывание. Необходимо выработать привычку систематической самостоятельной работы, «натаскивание» к экзамену дает слабые и поверхностные знания.

Решение задач является лучшим способом закрепления изученного материала. При решении задач можно рекомендовать следующие основные задачи:

1. Величины, которые даны в условии задачи следует перевести в одну систему единиц. Распространенным источником ошибок у учащихся является нарушение указанного правила.
2. Внимательно изучите цель, поставленную в задаче. Выявите, какие теоретические положения связаны с данной задачей или с некоторыми ее элементами.
3. Не рекомендуется приступать к решению задачи, не обдумав условие и не найдя плана решения.
4. Попытайтесь установить к какому типу задач, решение которых вам известно, можно отнести данную задачу.
5. Если не удается сразу определить ход решения задачи, то рекомендуется ответить на ряд вопросов: «Что делать?» «Что нужно найти?», «Достаточно ли данных, чтобы найти неизвестное?» и т.п.
6. Попытайтесь расчленить решение данной задачи на серию вспомогательных, последовательное решение которых позволит решить заданную задачу.
7. Найдя план решения, выполните его, убедитесь в правильности выбора метода и последовательности решения задачи, проведите проверку решения и, при необходимости, его исследование.
8. Подумайте, нельзя ли было решить задачу другими способами. Одна и та же задача может иметь несколько решений. Поэтому следует использовать наиболее распространенное решение задачи.
9. Если решить задачу не удается, рекомендуем отыскать в учебнике.

В соответствии с требованиями учебного плана и плана - графика по предмету «Основы высшей математики» выполняется одна домашняя контрольная работа.

Контрольная работа выполняется учащимся самостоятельно и только после того, как проработан соответствующий теоретический материал и решен необходимый минимум задач.

При выполнении контрольного задания необходимо обосновать каждый шаг решения задачи, исходя из теоретических основ предмета. Решение каждой задачи должно быть доведено до окончательного ответа.

К выполнению и оформлению работы предъявляются следующие требования:

1. Контрольная работа выполняется на форматках А4, вложенных в файлы. Файлы скрепляются в папку.
2. Первый лист - титульный лист утвержденного образца. Данные титульного листа: шифр, специальность, если она не отражена в шифре, фамилия, имя, отчество учащегося предмет и номер работы.
3. Работа должна быть выполнена чернилами черного цвета, аккуратно и разборчиво. Допускается компьютерная распечатка выполнения контрольной работы.
4. Каждую задачу надо начинать с новой страницы.
5. Решение задач желательно располагать в порядке номеров, указанных в задании, номера задач следует указывать перед условием.
6. Условия задач должны быть обязательно переписаны полностью в контрольную работу.
7. При оформлении записей необходимо выполнить общие требования к культуре их ведения. Важнейшие из этих требований:

   7.1 Учащиеся должны соблюдать абзацы, всякую новую мысль следует начинать с красной строки.

   7.2 Важные формулы, равенства, определения нужно выделять в отдельные строки, чтобы сделать их более обозримыми.

   7.3 При описании решения задачи краткая запись условия отделяется от решения и в конце решения представляется ответ.

   7.4 Серьезное внимание следует уделять правильному написанию сокращённых величин.

   7.5 Необходимо правильно употреблять математические символы.
8. Решения задач должны сопровождаться краткими, но достаточно обоснованными пояснениями, используемые формулы нужно выписывать.
9. Чертежи следует выполнять карандашом с использованием чертежных инструментов, соблюдая масштаб и ГОСТ.
10. В конце работы следует указать литературу, которой вы пользовались, проставить дату выполнения работы и подпись.
11. Если в работе допущены недочеты и ошибки, то учащийся должен выполнить все указания преподавателя, сделанные в рецензии.
12. Контрольные работы должны быть выполнены в срок (в соответствии с учебным планом - графиком). В период сессии работы на проверку не принимаются.
13. Работа, выполненная не по своему варианту, не учитывается и возвращается учащемуся без оценки.
14. Учащиеся, не имеющие зачета по контрольной работе, к экзамену не допускаются.
15. Во время экзамена зачтенные контрольные работы представляются преподавателю вместе с данными методическими указаниями.
16. Вариант работы выбирается по двум последним цифрам номера зачетной книжки. Номера задач, которые подлежат решению, определяются из таблицы вариантов:

Таблица вариантов

№ варианта	задание №1	задание №2	задание №3	задание №4	задание №5	задание №6	задание №7	№ варианта	задание №1	задание №2	задание №3	задание №4	задание №5	задание №6	задание №7
1.	17	26	24	10	2	28	11	51.	27	26	7	23	15	11	28
2.	18	27	25	11	3	29	12	52.	28	27	8	24	16	12	29
3.	19	28	26	12	4	30	13	53.	29	28	9	25	17	13	30
4.	20	29	27	13	5	1	14	54.	30	29	10	26	18	14	1
5.	21	30	28	14	6	2	15	55.	21	30	11	27	19	15	2
6.	22	21	29	15	7	3	16	56.	22	1	12	28	20	16	3
7.	23	22	30	16	8	4	17	57.	23	2	13	29	21	17	4
8.	24	23	1	17	9	5	18	58.	24	3	14	30	22	18	5
9.	25	24	2	18	10	6	19	59.	25	4	15	1	23	19	6
10.	26	25	3	19	11	7	20	60.	26	5	16	2	24	20	7
11.	27	26	4	20	12	8	21	61.	27	6	17	3	25	21	8
12.	28	27	5	21	13	9	22	62.	28	7	18	4	26	22	9
13.	29	28	6	22	14	10	23	63.	29	8	19	5	27	23	10
14.	30	29	7	23	15	11	24	64.	30	9	20	6	28	24	11
15.	1	30	8	24	16	12	25	65.	1	10	21	7	29	25	12
16.	2	1	9	25	17	13	26	66.	2	11	22	8	30	26	13
17.	3	2	10	26	18	14	27	67.	3	12	23	9	1	27	14
18.	4	3	11	27	19	15	28	68.	4	13	24	10	2	28	15
19.	5	4	12	28	20	16	29	69.	5	14	25	11	3	29	16
20.	6	5	13	29	21	17	30	70.	6	15	26	12	4	30	17
21.	7	6	14	30	22	18	1	71.	7	16	27	13	5	1	18
22.	8	7	15	1	23	19	2	72.	8	17	28	14	6	2	19
23.	9	8	16	2	24	20	3	73.	9	18	29	15	7	3	20
24.	10	9	17	3	25	21	4	74.	10	19	30	16	8	4	21
25.	11	10	18	4	26	22	5	75.	11	20	21	17	9	5	22
26.	12	11	19	5	27	23	6	76.	12	21	22	18	10	6	23
27.	13	12	20	6	28	24	7	77.	13	22	23	19	11	7	24
28.	14	13	21	7	29	25	8	78.	14	23	24	20	12	8	25
29.	15	14	22	8	30	26	9	79.	15	24	25	21	13	9	26
30.	16	15	23	9	21	27	10	80.	16	25	26	22	14	10	27
31.	17	16	24	10	22	28	11	81.	17	26	27	23	15	11	28
32.	18	17	25	11	23	29	12	82.	18	27	28	24	16	12	29
33.	19	18	26	12	24	30	13	83.	19	28	29	25	17	13	30
34.	20	19	27	13	25	1	14	84.	20	29	30	26	18	14	1
35.	21	20	28	14	26	2	15	85.	21	30	1	27	19	15	2
36.	22	21	29	15	27	3	16	86.	22	21	2	28	20	16	3
37.	23	22	30	16	28	5	17	87.	23	22	3	29	21	17	4
38.	24	23	1	17	29	6	18	88.	24	23	4	30	22	18	5
39.	25	24	2	18	30	7	19	89.	25	24	5	1	23	19	6
40.	26	25	3	19	1	8	20	90.	26	25	6	2	24	20	7
41.	27	26	4	20	2	9	21	91.	27	26	7	3	25	21	8
42.	28	27	5	21	3	10	22	92.	28	27	8	4	26	22	9
43.	29	28	6	22	4	11	23	93.	29	28	9	5	27	23	10
44.	30	29	7	23	5	12	24	94.	30	29	10	6	28	24	11
45.	1	30	8	24	6	13	25	95.	1	30	11	7	29	25	12
46.	2	1	9	25	7	14	26	96.	2	1	12	8	30	26	13
47.	3	2	10	26	8	15	27	97.	3	2	13	9	1	27	14
48.	4	3	11	27	9	16	28	98.	4	3	14	10	2	28	15
49.	5	4	12	28	10	17	29	99.	5	4	15	11	3	29	16
50.	6	5	13	29	11	18	30	00	6	5	16	12	4	30	17

4.КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Основные понятия и определения.

Комплексными числами называются выражения вида $a+bi$ (a и b) действительные числа, i- некоторый символ для которого справедливо равенство: $i^2=-1$, для которых следующим образом вводится понятие равенства и с которыми можно производить действия сложения и умножения:

а) два комплексных числа a_1+b_1i и a_2+b_2i равны тогда и только тогда, когда $a_1=a_2$ и $b_1 =b_2$;

б) суммой чисел a_1+b_1i и a_2+b_2i называется число $a_1+a_2+(b_1+b_2)i$;

в) произведением чисел a_1+b_1i и a_2+b_2i называется число $a_1a_2-b_1b_2+(a_1b_2+a_2b_1)i$.

Комплексное число часто обозначают одной буквой. Запись комплексного числа в виде $a+bi$ называется алгебраической формой записи комплексного числа. Комплексное число $a+0i$ отождествляют с действительным числом а и считают, что $a+0i=a$. Комплексное число $0+bi$ называют чисто мнимым и обозначают bi. Действительное число а называют действительной частью комплексного числа $a+bi$ действительное число b - коэффициентом при мнимой единице i. Для комплексных чисел понятия «больше» и «меньше» не определены. Комплексные числа вида $a+bi$ и $a-bi$ называют сопряженными.

г) правила вычитания и деления комплексных чисел:

$$Z_2 = a_2 + b_2i$$

$$Z_1 = a_1 + b_1i$$

Определяются формулами: $z_2-z_1=a_2-a_1+(b_2-b_1)i$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_1^2 + b_1^2} + \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1^2 + b_1^2} i \text{, где } a_1 + b_1i \neq 0 .$$

Формулы, определяющие правила действий над комплексными числами в алгебраической форме, не нуждаются в запоминании. Формулы суммы, разности и произведения комплексных чисел получаются автоматически, если формально выполнить соответствующие действия над двучленами a_1+b_1i и a_2+b_2i и заменить $i^2=-1$ При делении на комплексное число достаточно умножить числитель и знаменатель дроби на число, сопряженное знаменателю, т.е. на a_1-b_1i.

***Пример* 1.**Даны комплексные числа $z_1=3-2i$ и $z_2=6-17i$.

Найти разность z_2-z_1 и частное.

Решение: Разность находим формальным вычитанием двучленов $6-17i$ и $3-2i$:

$z_2-z_1=(6-17i)-(3-2i)=6-17i-3+2i=3-15i$. Чтобы найти частное можно домножить числитель и знаменатель на сопряженное знаменателю число.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{6-17i}{3-2i} = \frac{(6-17i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{18-51i+12i-34i^2}{9-4i^2} = \frac{18-39i+34}{9+4} = \frac{58-39i}{13} = \frac{52}{13} - \frac{39}{13}i = 4-3i$$

***Пример* 2.** Найти комплексное число $z = \frac{(3-i)^2}{1-2i}$.

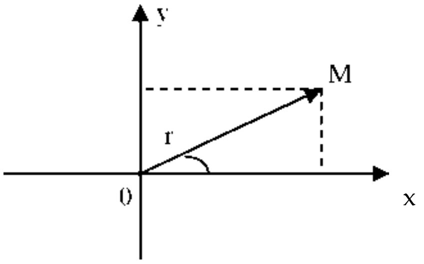
Решение: Произведем возведение в квадрат в числителе данной дроби.

$$z = \frac{(3-i)^2}{1-2i} = \frac{9-6i+i^2}{1-2i} = \frac{9-6i-1}{1-2i} = \frac{8-6i}{1-2i}$$

Заменяем, а далее после проведения вычислений действуем по алгоритму деления комплексных чисел. Получим следующее:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(8-6i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{8-6i+16i-12i^2}{1-4i^2} = \frac{8-10i+12}{1+4} = \frac{20+10i}{5} = \frac{20}{5} + \frac{10}{5}i = 4-2i$$

Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Комплексное число $Z= a+bi$ интерпретируют на координатной плоскости как точку $M(a,b)$ или как вектор OM с началом в начале координат и с концом в точке M .



Сама координатная плоскость называется при этом комплексной плоскостью, ось абсцисс - действительной осью, а ось ординат - мнимой осью. Модулем комплексного числа, называется длина вектора, соответствующего этому числу. Для модуля числа $z = a+bi$ используется обозначения $|z| = |a+bi|$.

На основании теоремы Пифагора получается формула $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$, например комплексное число z = 5-12i имеет модуль равный 13, т.к. $|z| = \sqrt{(-5)^2+12^2} = 13.$.

Аргументом комплексного числа z≠ 0 называется величина угла φ между положительным направлением действительной оси и вектором, соответствующим этому числу. Для аргументации числа $z=a+bi$ используются обозначения φ.

Аргумент комплексного числа z≠ 0 в отличии от модуля, определяется неоднозначно. Так, аргументами числа 2 являются следующие углы φ=0, φ=2п, φ=-2п и, вообще каждый из углов φ=2пк, к ∈Z. Аргументом числа i- следующие углы: $\varphi = \pi/2$; $\varphi = \pi/2+2\pi$; $\varphi = \pi/2-2\pi$ и вообще каждый из углов $\varphi = \pi/2+2\pi$к, к ∈Z. Любые два аргумента комплексного числа отличаются на слагаемое, кратное 2π.

Аргумент комплексного числа $z=a+bi$ находить так:

1) Найти острый угол $\alpha = arctg\left|\frac{b}{a}\right|$.

2) Найти аргумент комплексного числа в зависимости от того, в какой координатной четверти лежит вектор, соответствующий этому числу:

$$arq\ z=\begin{cases} arctq\frac{b}{a} & \text{для внутренних точек | и |V четвертей,} \\ arctq\frac{b}{a}+\pi & \text{для внутренних точек || четверти,} \\ arctq\frac{b}{a}-\pi & \text{для внутренних точек ||| четверти.} \end{cases}$$

Пример 3. Найти аргументы комплексного числа $z = \sqrt{3}-1$.

Решение: находим угол $\alpha = arctg(\frac{-1}{\sqrt{3}}) = -\frac{\pi}{6}$:

Вектор соответствующий данному комплексному числу лежит в IV координатной четверти, поэтому аргументом числа является угол $\varphi = -\frac{\pi}{6}$.

Тригонометрическая формула комплексного числа.

Пусть дано комплексное число z=a+bi.

a=r cosφ

b=r sinφ

Следовательно, комплексное число можно записать в виде z =r(cosφ +isinφ).

Где r- модуль комплексного числа, а φ - один из аргументов. Представление комплексного числа в данной форме называется тригонометрической формой записи комплексного числа.

Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме.

Если $z_1=r_1(\cos\varphi_1+ i\sin\varphi_1)$, $z_2=r_2(\cos\varphi_2+ i\sin\varphi_2)$, то

$z_1z_2 = r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$;

$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}=(\cos(\varphi_1-\varphi_2)-i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$;

Если $z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$,

$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r^n(\cos n\varphi-i\sin n\varphi)}=\sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}-i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n})$, где $\sqrt[n]{r}$ - арифметический корень.

Пример 7. Даны комплексные числа $z_1=4(\cos120^\circ+i\sin120^\circ)$, $z_2=\frac{1}{2}(\cos30^\circ+i\sin30^\circ)$. Найти их произведение и частное. Ответ записать в алгебраической форме.

Решение. Применяя правила умножения и деления комплексных чисел, имеем

$$z_1\cdot z_2=2(\cos150^\circ+i\sin150^\circ)=2(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2})=-\sqrt{3}=1$$

$$\frac{z_1}{z_2}=8(\cos90-i\sin90)=8(0+i\cdot1)=8i.$$

Пример 8.Вычислить $(\cos20^\circ+i\sin20^\circ)^{15}$.

Решение. $(\cos20^\circ+i\sin20^\circ)^{15}=\cos300^\circ+i\sin300^\circ=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Пример 9. Вычислить $(1-i\sqrt{3})^{12}$.

Решение. Запишем исходное число в тригонометрической форме по правилам преобразования.

Получим $2(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3})$

По формулам возведения в степень:

$$(2(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}))^{12}=4096(\cos9\pi+i\sin9\pi)=4096(\cos\pi+i\sin\pi)=4096$$.

Пример 10. Вычислить $z=\sqrt[4]{-8-8i\sqrt{3}}$

Решение. Запишем исходное число в тригонометрической форме.

После преобразования получим, что

$$\sqrt[4]{-8-8i\sqrt{3}}=\sqrt[4]{16}(\cos\frac{240^\circ+360^\circ k}{4}+i\sin\frac{240^\circ+360^\circ k}{4})=2(\cos(60+90k)+i\sin(60^\circ+90k)).$$

При *к=0, 1, 2, 3* получили:

$$Z_1=2(\cos60+i\sin60)=2(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})=1+i\sqrt{3},$$

$$Z_2=2(\cos150+i\sin150)=2(\frac{-\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2})=\sqrt{3}+i,$$

$$Z_3=2(\cos240+i\sin240)=2(-\frac{1}{2}+i\frac{-\sqrt{3}}{2})=-1-i\sqrt{3},$$

$$Z_4=2(\cos330+i\sin330)=2(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2})=-\sqrt{3}-i.$$

Показательная форма комплексного числа.

Рассматривая функцию $z=e^{i\varphi}$ для комплексного переменного, Леонард Эйлер

(1707-1763) установил замечательное соотношение $e^{i\varphi} = (\cos\varphi + i\sin\varphi)$, которое называется формулой Эйлера. Из этой формулы следует, что каждое комплексное число z≠0, можно записать в форме $r \cdot e^{i\varphi}$, которое называется показательной формой записи. Над комплексными числами, заданными в показательной форме можно проводить умножение, деление, возведение в натуральную степень и извлечение корня.

Пример 11.Представить число $z = 2e^{3\pi i/2}$ в алгебраической форме.

Решение: По условию $r = 2; \varphi = \dfrac{\pi}{2}$, откуда a = 0; b = -2, а значит $2e^{3\pi i/2} = -2i$.

Пример 12.Записать число z=-2+2i в показательной форме.

Решение: Для этого нужно найти модуль и аргумент показательного числа.

$r = 2\sqrt{2}$ $\varphi = \dfrac{3\pi}{4}$. Отсюда $z = 2\sqrt{2}e^{3\pi i/4}$.

5.РЕШЕНИ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ГАУССА И МЕТОДОМ КРАМЕРА

Решиь сисему линейных алгебраических упавнений двумя способами: 1) методом Гаусса; 2) методом Крамера.

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 13x_3 = 0, \\ 3x_1 + 14x_2 + 12x_3 = 18, \\ 5x_1 + 25x_2 + 16x_3 = 39. \end{cases} \begin{array}{|c|c} 3 & 5 \\ 2 & \\ & 2 \end{array}$$

1) Решение системы методом Гаусса

Исключим x_1 из второго и третьего уравнений. Для этого первое уравнение умножим на 3, второе на 2, уравнивая тем самым коэффициенты при x_1в обоих уравнениях и заем из первого уравнения вычтем второе. Аналогично , уравнивая коэффициенты при x_1 в первом и третьем уравнениях и вычитая из первого уравнения третье получим

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 13x_3 = 0, \\ -7x_2 + 15x_3 = -36, \\ -15x_2 + 33x_3 = -78. \end{cases}$$

Коэффициенты последнего уравнения сократим на 3, получим

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 13x_3 = 0, \\ -7x_2 + 15x_3 = -36, \\ -5x_2 + 11x_3 = -26. \end{cases} \begin{array}{|c} \\ 5 \\ 7 \end{array}$$

Далее уравнивая во втором и третьем уравнениях коэффициенты при x_2 и вычитая из второго уравнения третье будем иметь:

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 13x_3 = 0, \\ -7x_2 + 15x_3 = -36, \\ 2x_3 = 2. \end{cases}$$

На этом прямой метод Гаусса закончен. В результате обратного хода получим.

$$\begin{array}{l} x_3 = -1. \\ -7x_2 + 15(-1) = -36 \quad \Leftrightarrow -7x_2 = -21 \qquad \Leftrightarrow x_2 = 3 \\ 2x_1 + 7 \cdot 3 + 13(-1) = 0 \Leftrightarrow 2x_1 + 21 - 13 = 0 \Leftrightarrow 2x_1 = -8 \Leftrightarrow x_1 = -4 \end{array}$$

Итак решение данной системы таково: $x_1 = -4, x_2 = 3, x_3 = -1.$

2) Решение системы методом Крамера

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$$

Решение.По формулам крамера решение системы ищется в виде

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta},$$

Где Δ - основной определитель системы, а Δx_i - вспомогательные определители, получаемые из основного заменой i –го столбца столбцом свободных членов. При $\Delta \neq 0$ система имеет единственное решение. При $\Delta = 0$ решение следует искать другими методами.

Таким образом имеем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 3 + (-1) \cdot (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 2 \cdot 3 - 1 \cdot (-2) \cdot 2 = 18 \neq 0.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение. Найдем вспомогательные определители.

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 1 \cdot 3 + (-1) \cdot (-2) \cdot 2 + 1 \cdot 6 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 2 - (-1) \cdot 6 \cdot 3 - (-2) \cdot (-2) \cdot 2 = 18,$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 \cdot 3 + (-2) \cdot (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot 6 \cdot 1 - (-2) \cdot 2 \cdot 3 - 1 \cdot (-2) \cdot 2 = 36,$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 6 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - (-2) \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \cdot 2 = -18.$$

Тогда $x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{18}{18} = 1, x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{36}{18} = 2, x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{-18}{18} = -1.$

6. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ ФУНКЦИЙ

Число *А* называется *пределом функции f* (x) *в точке а* (или при *x*, стремящемся к *a*), если для любого сколь угодно малого числа *ε*> 0 существует такое *δ*> 0, что для всех $x\neq a$, удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta$, выполняется условие $|f(x) - A| < \varepsilon$

Предел функции обозначается $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

Если в некоторой окрестности точки *a*, за исключением, возможно, самой этой точки, определены функции *f*(x) и *g*(x) и существуют пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ то справедливы соотношения:

1) $\lim\limits_{x\to a} c = c;$

2) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x);$

3) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} g(x);$

4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)};$

5) $\lim\limits_{x\to a}(cf(x)) = c\lim\limits_{x\to a} f(x)$

Приведем замечательные пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1;$

5) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^{x} = \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$

Решение типовых задач

Найдите пределы:

$$а)\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-5x+6}{5x^2-5x-30}; \qquad б)\lim_{x\to 1}\frac{x^2-5x+6}{5x^2-5x-30};$$

$$в)\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{5x^2-5x-30}; \qquad г)\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}};$$

$$д)\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{tg5x}; \qquad е)\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3}{x}};$$

Решение. а) При $x\to\infty$ — имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Чтобы избавится от нее, делим числитель и знаменатель на x^2 :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-5x+6}{5x^2-5x-30} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-5/x+6/x^2}{5-5/x-30/x^2} = \frac{1-0+0}{5-0-0} = 0{,}2;$$

б) При *x=1* значения числителя и знаменателя дроби конечны, причем знаменатель не равен нулю. Следовательно, данная функция непрерывна в точке *x=1*. Тогда $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(x_0)$:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-5x+6}{5x^2-5x-30} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-5+6}{5-5-30} = \frac{2}{-30} = -\frac{1}{15};$$

в)Так как при *x=3* имеем неопределенность вида $0/0$, то для вычисления предела разложим числитель и знаменатель дроби на множители:

$$\frac{x^2-5x+6}{5x^2-5x-30} = \frac{(x-3)(x-2)}{5(x-3)(x+2)};$$

тогда

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{5x^2-5x-30}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-2)}{5(x-3)(x+2)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-2)}{5(x+2)}=\frac{3-2}{5(3+2)}=\frac{1}{25}=0.04;$$

г) При x=2 имеем неопределенность вида $0/0$. Для того чтобы избавиться от нее, домножим числитель и знаменатель дроби на сопряженные им выражения:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)(\sqrt{x}+\sqrt{2})}{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x+2}+2)(\sqrt{x}+\sqrt{2})}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x+2}^{\,2}-2^2)(\sqrt{x}+\sqrt{2})}{(\sqrt{x}^{\,2}-\sqrt{2}^{\,2})(\sqrt{x+2}+2)}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(\sqrt{x}+\sqrt{2})}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{2})}{(\sqrt{x+2}+2)}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{\sqrt{2+2}+2}=\frac{2\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

д) Воспользуемся первым замечательным пределом:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{tg5x}=\lim_{x\to 0}(\frac{\sin x}{x}\cos 5x\frac{1}{5}\frac{5x}{\sin 5x})=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\cos 5x\frac{1}{5}\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}}=1\cdot 1\cdot\frac{1}{5}\cdot 1=\frac{1}{5}=0,2;$$

е) Воспользуемся вторым замечательным пределом:

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3}{x}}=\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{6}{2x}}=\lim_{2x\to 0}((1+2x)^{\frac{1}{2x}})^6=e^6.$$

7. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ

Производной функции f* (x) *в точке x называют предел отношения приращения функции $\Delta f(x)$ к приращению аргумента Δx, когда Δx стремится к нулю:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

Наряду с обозначением производной $f'(x)$ может быть использовано и другое обозначение $\frac{df(x)}{dx}$, причем они равноправны.

Рассмотрим ***геометрический смысл производной***. Пусть дана некоторая функция f(x). Значение производной этой функции в точке x_0 равно угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции через точку $M(x_0, y_0)$, где $y_o = f(x_0)$:

$$f'(x)=k.$$

Уравнение касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0, y_0)$, в общем виде записывается следующим образом:

$$y=y_0+f'(x_0)(x-x_0).$$

Физический смысл производной заключается в следующем: пусть зависимость пути, пройденного материальной точкой, от времени описывается функцией s=$s(t)$. Производная данной функции в точке t_0 равна значению мгновенной скорости движения материальной точки в данный момент времени:

$$v(t_0)=s'(t_0).$$

Перечислим правила дифференцирования:

$1)C'=0;$

$2)(u\pm v)'=u'\pm v';$

$3)(uv)'=u'v+uv';$

$4)(Cf)'=Cf';$

$5)(\frac{u}{v})'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$

Производная сложной функции вида $y = f(g(x))$ равна

$$y' = f'(g(x))g'(x).$$

Приведем *таблицу производных основных элементарных функций:*

$1)(kx+b)' = k;$ $2)(x^n)' = nx^{n-1};$ $3)(x^2)' = 2x;$

$4)(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}};$ $5)\sin' x = \cos x;$ $6)\cos' x = -\sin x;$

$7)tg' x = \dfrac{1}{\cos^2 x};$ $8)ctg' x = -\dfrac{1}{\sin^2 x};$ $9)(a^x)' = a^x \ln a;$ $10)(e^x)' = e^x;$

$11)(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a};$ $12)(\ln x)' = \dfrac{1}{x};$

$13)(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}};$ $14)(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

$15)(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2};$ $15)(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}.$

Производной второго порядка или второй производной y'', называют производную от первой производной:

$$y'' = (y')'.$$

Решение типовых задач

1. Найдите производные функций:

$а)y = 5x^2 \sin x;$ $б)y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}};$ $в)y = \sin^2(x + \dfrac{1}{\sqrt{x}}).$

Решение. Вычислим производные заданных функций:

$$а)y' = (5x^2 \sin x)' = (5x^2)' \sin x + (\sin x)' 5x^2 = 10x \sin x + 5x^2 \cos x = 5x(2\sin x + x\cos x);$$

$$б)y' = (\frac{\ln x}{\sqrt{x}})' = \frac{(\ln x)'\sqrt{x} - (\sqrt{x})'\ln x}{(\sqrt{x})^2} = \frac{\frac{1}{x}\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x}{\sqrt{x}} = \frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}};$$

$$в)y' = (\sin^2(x + \frac{1}{\sqrt{x}}))' = 2\sin(x + \frac{1}{\sqrt{x}})(\sin(x + \frac{1}{\sqrt{x}}))' = 2\sin(x + \frac{1}{\sqrt{x}})\cos(x + \frac{1}{\sqrt{x}}) \cdot (x + \frac{1}{\sqrt{x}})' =$$

$$= \sin(2(x + \frac{1}{\sqrt{x}}))(1 + (x^{\frac{-1}{2}})') = \sin(2(x + \frac{1}{\sqrt{x}}))(1 - \frac{1}{2}x^{\frac{-3}{2}})$$

2. Вычислите значение первой и второй производной заданной функции

$y = \dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}$ в точке $x_0 = \dfrac{\pi}{2}.$

Решение: Найдем первую производную функции:

$$y' = \frac{(1-\sin x)'(1+\sin x) - (1+\sin x)'(1-\sin x)}{(1+\sin x)^2} = \frac{-\cos x(1+\sin x) - \cos x(1-\sin x)}{(1+\sin x)^2} =$$

$$= \frac{-\cos x - \cos x \sin x - \cos x + \cos x \sin x}{(1+\sin x)^2} = \frac{-2\cos x}{(1+\sin x)^2}.$$

Найдем значение производной в точке $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$

$$y'(\frac{\pi}{2}) = \frac{-2\cos(\frac{\pi}{2})}{(1+\sin(\frac{\pi}{2}))^2} = \frac{-2 \cdot 0}{1+1} = 0.$$

Теперь найдем значение второй производной в точке $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$:

$$y'' = \left(\frac{-2\cos x}{(1+\sin x)^2}\right)' = \frac{(-2\cos x)'(1+\sin x)^2 - (-2\cos x)((1+\sin x)^2)'}{(1+\sin x)^4} = \frac{2\sin x(1+\sin x)^2 + 2\cos x \cdot 2(1+\sin x)\cos x}{(1+\sin x)^4} =$$

$$= \frac{(1+\sin x)(2\sin x(1+\sin x)) + 4\cos^2 x}{(1+\sin x)^4} = \frac{(2\sin x + 2\sin^2 x + 4\cos^2 x)}{(1+\sin x)^3} = \frac{2\sin x + 2 + 2\cos^2 x}{(1+\sin x)^3} = \frac{2(\sin x + 1 + \cos^2 x)}{(1+\sin x)^3}$$

$$y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2(\sin(\frac{\pi}{2}) + 1 + \cos^2(\frac{\pi}{2}))}{(1+\sin(\frac{\pi}{2}))^3} = \frac{2(1+1+0)}{(1+1)^3} = \frac{4}{8} = 0{,}5.$$

8. ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Функция f(x), определенная на некотором множестве D, называется первообразной для функции f(x), определенной на том же множестве, если функция F(x) дифференцируема для любых x ∈D, причем

$$F\,'(\mathrm{x}) = f\,(\mathrm{x})$$

Можно показать, что если функция F(x) является первообразной для функции f(x) на некотором множестве D, то и функция F(x) + C, где C - константа, также будет первообразной для функции f(x) на этом множестве. Совокупность всех первообразных для функции f(x), определенной на множестве D, называется неопределенным интегралом от функции f(x) и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Перечислим свойства неопределенного интеграла.

1. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, а его дифференциал - подынтегральному выражению:

$$\int f(x)dx = f(x),\ d(\int f(x)dx) = f(x)dx.$$

2. Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен сумме этой функции и произвольной константы:

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

3. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx, \text{ где } \kappa=\text{const}\neq 0.$$

4. Неопределенный интеграл от суммы (разности) двух непрерывных функций равен сумме (разности) интегралов от этих функций:

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

Приведем таблицу неопределенных интегралов:

1) $\int dx = x + C;$

2) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C;$

3) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$

4) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$

5) $\int \sin x dx = -\cos x + C;$

6) $\int \cos x dx = \sin x + C;$

7) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C;$

8) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C;$

9) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C;$

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C;$

11) $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C;$

12) $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C.$

Существует ряд методов интегрирования функций. Под *непосредственным интегрированием* понимают метод, при котором с помощью тождественных преобразований подынтегральной функции и использования свойств 3,4 неопределенного интеграла удается свести искомый интеграл к одному или нескольким табличным интегралам. Непосредственное интегрирование возможно далеко не всегда, поэтому нередко приходится использовать другие методы.

Метод подстановки заключается в том, что путем замены переменной x= φ (x), *dx* = φ '*(t)dt* получают интеграл вида:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

При этом стремятся подобрать такую замену переменной, чтобы полученный интеграл был более простым (например, находился непосредственным интегрированием).

Рассмотрим применение метода подстановки на примере вычисления интеграла

$$\int f(ax+b)dx,$$

если известно, что $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Введем замену *ax*+*b*=*t*, тогда *adx*=*dt* или *dx*=*dt/a*.С учетом этого имеем:

$$\int f(ax+b)dx = \int f(t)\frac{dt}{a} = \frac{1}{a}\int f(t)dt = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

Таким образом, если $\int f(x)dx = F(x) + C$,

то $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$

Еще одним методом интегрирования является *интегрирование функции по частям,* которое производится по формуле $\int udv = uv - \int vdu$.

Решение типовых задач

1. Вычислите неопределенные интегралы:

$$а)\int (x^3 + \sqrt{2x+5} + \frac{1}{x^2})dx;\ б)\int \frac{x^3+0,25}{x(x^3+1)}dx;\ в)\int x\sin xdx.$$

Решение. а) Воспользуемся методом непосредственного интегрирования:

$$\int (x^3 + \sqrt{2x+5} + \frac{1}{x^2})dx = \int x^3dx + \int \sqrt{2x+5}dx + \int \frac{1}{x^2}dx = \frac{x^4}{4} + \frac{1}{2}\frac{(2x+5)^{\frac{3}{2}}}{1,5} - \frac{1}{x} + C;$$

б) Произведем замену $x(x^3+1) = x^4 + x = t.$ Тогда

$dt = (4x^3+1)dx = 4(x^3+0,25)dx$ и

$$\int \frac{x^3+0,25}{x(x^3+1)}dx = \frac{1}{4}\int \frac{4(x^3+0,25)}{x(x^3+1)}dx = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{4}\ln|t| + C = \frac{1}{4}\ln|x^4+x| + C;$$

в) Воспользуемся методом интегрирования по частям. Для этого введем следующие обозначения:

u=*x*, *du*=*dx*, *dv*=*sinx dx*, v=$\int \sin xdx = -\cos x.$

Согласно формуле интегрирования по частям, получим:

$$\int x\sin xdx = -x\cos x - \int (-\cos x)dx = -x\cos x + \int \cos xdx = -x\cos x + \sin x + C.$$

2. Вычислите неопределенный интеграл $\int \sin^4 xdx.$

$$\int \sin^4 xdx = \int (\sin^2 x)^2 dx = \int \frac{(1-\cos 2x)^2}{4} dx = \frac{1}{4}\int (1-2\cos 2x+\cos^2 2x)dx = \frac{1}{4}\int dx - \frac{2}{4}\int \cos^2 2xdx =$$
$$= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{4}\int \cos 2xdx + \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 4x}{2} dx = \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2xdx + \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{8}\int \cos 4xdx =$$
$$= \frac{x}{4} - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{x}{8} + \frac{1}{32}\sin 4x + C = \frac{3x}{8} - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

9.ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

9.1 Решение дифференциальных уравнений первого порядка.

Дифференциальным уравнением называется уравнение вида

$$F(x, y, y', ..., y'') = 0$$

Решением дифференциального уравнения называют любую функцию $y = y(x)$, которая обращает данное уравнение в тождество. Функция $y = y(x, C_1, C_2, ..., C_n)$ называется общим решением дифференциального уравнения, если она обращает дифференциальное уравнение в тождество при любых значениях постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$ Для заданных начальных условий

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

можно найти значения постоянных $C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0$, при которых функция $y = y(x, C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0)$ будет удовлетворять этим начальным условиям. Такую функцию называют ***частным решением дифференциального уравнения.***

Порядком дифференциального уравнения называют наибольший порядок производной, входящей в это уравнение. Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка. В общем случае оно имеет вид

$$F(x, y, y') = 0$$

Если дифференциальное уравнение можно представить в виде

$$f_1(x)dx = f_2(y)dy$$

то его называют ***уравнением с разделяющимися переменными***. Для решения такого уравнения достаточно проинтегрировать его левую и правую части.

Для рассмотрения однородных дифференциальных уравнений введем понятие однородной функции.

Функция R(x, y) , называется ***однородной функцией k-го порядка***, если для нее при любом значении t выполняется тождество *R(tx, ty)* = t^k*R(x, y)* .

Дифференциальное уравнение первого порядка *y*' = *f* (x, y) называется *однородным*, если *f* (x, y) является однородной функцией нулевой степени. Однородное дифференциальное уравнение первого порядка можно представить в виде

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

Это уравнение приводится к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными заменой *y(x)* = z(x) x.

Уравнение вида *y*' + P(x) *y* = Q(x)

называют ***линейным дифференциальным уравнением первого порядка***. Его решение ищут в виде y(x) = *u* (x)v(x), где *u* (x) и v(x)- неизвестные функции. После подстановки в уравнение *y* и $y' = u'v + v'u$ получаем соотношение $v\frac{du}{dx} + (\frac{dv}{dx} + P(x)v)u = Q(x)$

В качестве v(x) следует выбрать одну из функций, удовлетворяющих уравнению

$$\frac{dv}{dx}+P(x)v=0.$$

Тогда u(x) определяется из уравнения $v\frac{du}{dx}=Q(x).$

Решение типовых задач

1. найти общее и частное решение дифференциального уравнения

$$y^{'}-y-3x^2y=0, y(1)=e^2$$

Решение. Это уравнение с разделяющимися переменными. Преобразуем его:

$$\frac{dy}{dx}=y+3x^2y,\ dy=y(1+3x^2)dx,\ \frac{dy}{dx}=(1+3x^2)dx.$$

Проинтегрируем левую и правую части полученного уравнения:

$$\int\frac{dy}{y}=\int(1+3x^2)dx,\ \ln y=x+x^3+\ln C,\ y=e^{x+x^3+\ln C},\ y=Ce^{x+x^3}.$$

Последнее выражение и является общим решением дифференциального уравнения. Найдем теперь его частное решение, удовлетворяющее условию $y(1)=e^2$.Отсюда С =1, и частное решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y=e^{x+x^3}$$

2. Найдите общее решение дифференциального уравнения:

а) $(2x+y)dx+(x+y)dy=0;$ б) $y^{'}-xy=e^{\frac{x^2}{2}};$

Решение. а) Это однородное дифференциальное уравнение первого порядка, так как функция P(x, y) и Q(x, y) являются однородными функциями первой степени.

Тогда для решения уравнения воспользуемся заменой $y = zx$, откуда $dy = xdz + zdx$.

Подставим значения y и dy в исходное уравнение:

$$(2x+zx)dx+(x+zx)(xdz+zdx)=0,$$

$$x(2+z)dx+x^2(1+z)+xz(1+z)dx=0,$$

$$-(2+z+z+z^2)dx=x(1+z)dz,$$

$$-\frac{dx}{x}=\frac{1+z}{2+2z+z^2}dz,$$

проинтегрируем левую и правую части полученного уравнения. Для вычисления интеграла, стоящего в его правой части, произведем замену

$$t=2+2z+z^2,\ dt=(2+2z)dz.$$

В результате имеем:

$$\int\frac{1+z}{2+2z+z^2}=\frac{1}{2}\int\frac{2+2z}{2+2z+z^2}dz=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{2t}\ln|t|+\ln C=\frac{1}{2}\ln(2+2z+z^2)+\ln C.$$

Тогда

$$-\ln x+\ln C=\frac{1}{2}\ln(2+2z+z^2),$$

$$\frac{C}{x}=\sqrt{2x^2+2xy+y^2},C=x\sqrt{2+2\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^2}},$$

$$C=\sqrt{2x^2+2xy+y^2},C^2=2x^2+2xy+y^2$$

Общее решение дифференциального уравнения запишется в виде

$$2x^2+2xy+y^2=C_1,\ где\ C_1=C^2;$$

б) Уравнение $y^{'}-xy=e^{\frac{x^2}{2}}$; является линейным, поэтому его решение будем искать в виде $y(x) = u(x)v(x)$. Подставляя y в исходное уравнение, имеем:

$$v\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx}-xuv=e^{\frac{x^2}{2}}, \quad v\frac{du}{dx}+(\frac{dv}{dx}-xv)u=e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Положим выражение в скобках равным нулю:

$$\frac{dv}{dx}-xv=0,\ \frac{dv}{dx}=xv,\ \frac{dv}{v}=xdx,\ \ln v=\frac{x^2}{2},\ v=e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Подставим найденное значение v в уравнение, учитывая, что при этом выражение в скобках обратиться в нуль. Получим следующее уравнение относительно u :

$$e^{\frac{x^2}{2}}\frac{du}{dx}=e^{\frac{x^2}{2}},\ \frac{du}{dx}=1,\ du=dx, u=x+C.$$

Общее решение дифференциального уравнения запишется в виде

$$y=uv=e^{\frac{x^2}{2}}(x+C).$$

9.2 Решение дифференциальных уравнений второго порядка.

Дифференциальное уравнение второго порядка в общем случае имеет вид

$$F(x,y,y',y'')=0$$

Рассмотрим однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y''+py'+qy=0,$$

где p и q - действительные числа. Для нахождения решений этого уравнения вначале ищут корни ***характеристического уравнения.***

$$k^2+pk+q=0.$$

Возможны три случая:

1) если $D>0$,т.е. k_1и k_2 -действительные корни характеристического уравнения, то общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$y=C_1e^{k_1}+C_2e^{k_2}$.

2) если $D=0$, т.е. k - единственный действительный корень, характеристического уравнения, то общее решение дифференциального уравнения имеет вид $y=C_1e^k+xC_2e^k$.

3) если $D<0$, т.е k_1и k_2 - комплексные корни, $k_1 = a + i\beta$, $k_2 = a - i\beta$, то общее решение дифференциального уравнения имеет вид: $y=e^{ax}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$.

Решение типовых задач

Найдите общее решение дифференциального уравнения:

а) $y''+2y'+2y=0;$ б) $y''-4y'+3y=0;$ в) $y''-4y'+4y=0;$

Решение. а) Запишем характеристическое уравнение и решим его:

$$k^2+2k+2=0, D=4-8=-2,$$

$$k_1=\frac{-2-\sqrt{-4}}{2}=\frac{-2-2i}{2}=-1-i,$$

$$k_2=\frac{-2+\sqrt{-4}}{2}=\frac{-2+2i}{2}=-1+i.$$

Тогда, учитывая, что $a = -1$, $\beta = 1$, общее решение уравнения можно записать в вид:

$$y=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$$

б) Запишем его характеристическое уравнение:

$$k^2-4k+3=0, D=16-12=4,$$

$$k_1=\frac{4-\sqrt{4}}{2}=\frac{4-2}{2}=1,$$

$$k_2=\frac{4+\sqrt{4}}{2}=\frac{4+2}{2}=3.$$

Тогда общее решение дифференциального уравнения имеет вид: $y=C_1e^x+C_2e^{3x}$.

в) Запишем его характеристическое уравнение:

$$k^2-4k+4=0, D=16-16=0,$$

$$k=\frac{4-\sqrt{0}}{2}=2.$$

Тогда общее решение дифференциального уравнения имеет вид: $y=C_1e^{2x}+xC_2e^{2x}$.

10.РЯДЫ

10.1 Ряды с неотрицательными членами

Выражение вида $a_1+a_2+...+a_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ называется числовым рядом,а $S_n=a_1+a_2+...+a_n$ - n-й частной суммой ряда. Если существует конечный предел $S=\lim_{n\to\infty}S_n$ то Sназывается суммой ряда. Ряд сходится если он имеет конечную сумму S и расходится, если $\lim_{n\to\infty}S_n=\infty$. Как правило, сумму ряда вычислить сложно. Для решения вопроса о сходимости или расходимости ряда пользуются необходимым и достаточными признаками сходимости ряда.

Необходимый признак сходимости ряда. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, то его общий член a_n стремится к нулю при неограниченном возрастании n.

Пример 1. Дан общий член ряда а) $a_n=\frac{n^2+1}{n^3}$,, б) $b_n=\frac{n^3+1}{n^2}$,

Написать ряд в развернутом виде и проверить выполняется ли необходимый признак сходимости ряда.

Решение. а) Находим $a_1=\frac{1^2+1}{1^3}=2, a_2=\frac{2^2+1}{2^3}=\frac{5}{8}, a_3=\frac{3^2+1}{3^3}=\frac{10}{27}, a_4=\frac{4^2+1}{4^3}=\frac{17}{64}$.

Записываем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3}=2+\frac{5}{8}+\frac{10}{27}+\frac{17}{64}+....$

Необходимый признак сходимости выполняется, так как $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n^3}=0.$. Ряд может сходится, если будут выполнены достаточные признаки сходимости ряда.

б) Находим $b_1=\frac{1^3+1}{1^2}=2, b_2=\frac{2^3+1}{2^2}=\frac{9}{4}, b_3=\frac{3^3+1}{3^2}=\frac{28}{9}, b_4=\frac{4^3+1}{4^2}=\frac{65}{16}$,...т.е.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+1}{n^2}=2+\frac{9}{4}+\frac{28}{9}+\frac{65}{16}+....$$

Так как $\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+1}{n^2}=\infty\neq0$, то необходимый признак сходимости не выполняется и, значит, ряд расходится.

Достаточные признаки сходимости.

Признак сравнения. Пусть даны два ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (2)Если $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lambda\neq 0$ где λ - конечное число, то оба ряда ведут себя одинаково, т.е. сходятся и расходятся одновременно.

В качестве табличных рядов, с которыми производят сравнение, используют гармоничный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ (расходящийся), обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ (сходящийся при $a>1$ и расходящийся при $a\leq 1$).

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+4)\sqrt{n}}$

Решение. Рассмотрим гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, который сходится.

Найдем предел $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+4)\sqrt{n}}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{3}{2}}}{(n+2)n^{\frac{1}{2}}}=1\neq 0$, значит ряды ведут себя одинаково, т.е. данный ряд сходится.

Признак Даламбера. Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами. Тогда если существует

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=p$, то при $p<1$ ряд сходится; при $p>1$ ряд расходится; при $p=1$ признак ответа не дает, т.е. следует применить другой признак сходимости.

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}=\frac{1!}{1}+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{3^3}+\ldots=\frac{1}{1}+\frac{1\cdot 2}{2^2}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{3^3}+\ldots$

Решение .Здесь $a_n=\frac{n!}{n^n}$, $a_{n+1}=\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$ и, значит,

$$p=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!n^n}{(n+1)^{n+1}n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)n!a^n}{(n+1)^n(n+1)n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(\frac{n+1}{n})^n}=\frac{1}{e}\langle 1.$$

Поэтому данный ряд сходится.

Радикальный признак Коши. Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами. Тогда если существует $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=p$, то при $p<1$ряд сходится; при $p>1$ряд расходится, при $p=1$ признак ответа не дает, т.е. следует применить другой признак сходимости.

Пример 4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{n+3}\right)^{2n}$

Решение. Находим $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{n+3}\right)^2=2^2=4\rangle 1$. Значит данный ряд расходится.

Интегральный признак Коши. Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами, общий член которого $a_n = f(x)$ - функция целочисленного аргумента. Если функция $f(x)$ совпадающая с $f(n)$ в целых точках, монотонно убывает в промежутке [m, ∞] (m - натуральное число) и непрерывна в этом промежутке, то данный ряд и несобственный интеграл $\int_m^{\infty} f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Пример 5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2 n} = \frac{1}{2\ln^2 2} + \frac{1}{3\ln^2 3} + \ldots$

Решение. Имеем

$$f(x) = \frac{1}{x\ln^2 x}(2 \le x < \infty), \int_{n=2}^{\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x} = \int_{n=2}^{\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x}\Big|_2^{\infty} = \frac{1}{\ln\infty} + \frac{1}{\ln 2} = c + \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}$$

Следовательно $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$ сходится и, значит, ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2 n}$ также сходится.

10.2 Знакопеременные ряды

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с членами, имеющими произвольные знаки, называется знакопеременными.

Достаточный признак сходимости знакочередующегося ряда (признак Лейбница). Если члены знакочередующегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ монотонно убывают по абсолютной величине: $u_1 > u_2 > u_3 > u_n >$ ... и, $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, то этот знакочередующийся ряд сходится.

Достаточный признак сходимости знакопеременного ряда. Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + .. + a_n + \ldots(1)$ с членами, имеющими произвольные знаки. Тогда если ряд сходится $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + .. + |a_n| + \ldots(2)$ составленный из абсолютных величин членов данного ряда, то сходится и ряд (1). Знакопеременный (знакочередующийся) ряд называется абсолютно сходящимся, если сходятся одновременно ряды (2) и (1), и условно сходящимся, если ряд (1) сходится, а ряд (2) расходится.

Пример 6. Исследовать на сходимость ряды

а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$

б) $1 - \frac{1}{2^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} - \ldots$

Решение .а) Так как $|1| > |\frac{1}{2}| > |\frac{1}{3}| > |\frac{1}{4}| > \ldots >$ и $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ сходится по признаку Лейбница. Однако ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ — составленный из модулей, расходятся как гармонический и, следовательно, данный знакочередующийся ряд сходится условно.

б) Данный знакопеременный ряд сходится, так как ряд, составленный из модулей: $1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}+...+\frac{1}{n^3}+...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ является обобщенным гармоническим при a> 1 сходится.

11. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Задание №1.Комплексные числа

1.1-1.15 Найдите $z_1+z_2; z_1-z_2; z_1\cdot z_2; z_1/z_2; {z_1}^2;$

1.1	$z_1=2+i$	$z_2=-3-2i$
1.2	$z_1=-1+3i$	$z_2=2-i$
1.3	$z_1=4-i$	$z_2=1+3i$
1.4	$z_1=-1+4i$	$z_2=2-3i$
1.5	$z_1=3-i$	$z_2=-2+3i$
1.6	$z_1=-4+i$	$z_2=2-i$
1.7	$z_1=1-3i$	$z_2=-2+i$
1.8	$z_1=4-3i$	$z_2=-2+5i$
1.9	$z_1=2-4i$	$z_2=3+i$
1.10	$z_1=-3+2i$	$z_2=5-i$
1.11	$z_1=-2-5i$	$z_2=-1+i$
1.12	$z_1=-4+3i$	$z_2=6-i$
1.13	$z_1=5-2i$	$z_2=3+4i$
1.14	$z_1=-1-2i$	$z_2=4+3i$
1.15	$z_1=6-4i$	$z_2=4+i$

1.16-1.30 Возведите в степень комплексное число и запишите полученное число в тригонометрической форме.

1.16	$z=(1-i)^2$
1.17	$z=(5-4i)^2$
1.18	$z=(2+4i)^3$
1.19	$z=(-3-2i)^2$
1.20	$z=(4+5i)^2$
1.21	$z=(3-6i)^2$
1.22	$z=(3-6i)^3$
1.23	$z=(4+3i)^2$
1.24	$z=(3+2i)^3$
1.25	$z=(2-3i)^3$
1.26	$z=(3-4i)^2$
1.27	$z=(4+3i)^3$
1.28	$z=(3+4i)^2$
1.29	$z=(2-3i)^3$

1.30	$z=(3+4i)^3$

Задание №2.

Решить систему линейных алгебраических уравнений двумя способами:
1) Методом Гаусса; 2) методом Крамера.

2.1	$\begin{cases}2x_1+3x_2+x_3=1,\\3x_1+2x_2+x_3=5,\\2x_1+x_2+3x_3=11.\end{cases}$	2.11	$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=5,\\2x_1+3x_2+x_3=1,\\3x_1+x_2+2x_3=6.\end{cases}$
2.2	$\begin{cases}2x_1+3x_2-4x_3=20,\\3x_1-2x_2-5x_3=6,\\x_1-2x_2+3x_3=6.\end{cases}$	2.12	$\begin{cases}x_1+2x_2+2x_3=3,\\6x_1-x_2+3x_3=1,\\4x_1-2x_2-5x_3=5.\end{cases}$
2.3	$\begin{cases}2x_1+5x_2-3x_3=4,\\4x_1-3x_2+2x_3=9,\\5x_1+6x_2-2x_3=18.\end{cases}$	2.13	$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=5,\\7x_1+8x_2+9x_3=13,\\4x_1+5x_2+6x_3=7.\end{cases}$
2.4	$\begin{cases}2x_1-x_2+2x_3=-4,\\4x_1+x_2+4x_3=-2,\\x_1+x_2+2x_3=-1.\end{cases}$	2.14	$\begin{cases}2x_1+x_2+3x_3=3,\\3x_1+4x_2+7x_3=2,\\4x_1+2x_2+5x_3=5.\end{cases}$
2.5	$\begin{cases}3x_1-2x_2+4x_3=11,\\2x_1-x_2-x_3=4,\\3x_1+4x_2-2x_3=11.\end{cases}$	2.15	$\begin{cases}3x_1-5x_2-6x_3=-9,\\3x_1+x_2+x_3=5,\\x_1-4x_2-2x_3=-3.\end{cases}$
2.6	$\begin{cases}x_1+5x_2+x_3=0,\\2x_1-x_2-3x_3=-4,\\3x_1+4x_2+2x_3=8.\end{cases}$	2.16	$\begin{cases}x_1+3x_2+2x_3=4,\\2x_1+6x_2+x_3=2,\\4x_1+8x_2-x_3=2.\end{cases}$
2.7	$\begin{cases}x_1+x_2-x_3=1,\\4x_1+x_2-3x_3=3,\\8x_1+3x_2-6x_3=2.\end{cases}$	2.17	$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=4,\\5x_1-7x_2+8x_3=-7,\\2x_1-3x_2+4x_3=-4.\end{cases}$
2.8	$\begin{cases}2x_1+3x_2+4x_3=-20,\\7x_1-5x_2=31,\\4x_1+11x_3=-43.\end{cases}$	2.18	$\begin{cases}x_1+5x_2+2x_3=5,\\2x_1+3x_2+4x_3=3,\\3x_1+4x_2+2x_3=8.\end{cases}$
2.9	$\begin{cases}x_1+2x_2+2x_3=2,\\2x_1+x_2+2x_3=1,\\2x_1+2x_2+x_3=1.\end{cases}$	2.19	$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=2,\\4x_1-11x_2+10x_3=11,\\2x_1-3x_2+4x_3=5.\end{cases}$
2.10	$\begin{cases}x_1+x_2+2x_3=2,\\x_1+2x_2+x_3=2,\\2x_1+x_2+x_3=1.\end{cases}$	2.20	$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=4,\\3x_1-x_2+x_3=-11,\\5x_1+x_2+2x_3=8.\end{cases}$
2.21	$\begin{cases}4x_1+x_2-3x_3=-5,\\x_1+x_2-x_3=2,\\8x_1+3x_2-6x_3=-4.\end{cases}$	2.26	$\begin{cases}5x_1+x_2+2x_3=11,\\x_1+2x_2+4x_3=19,\\3x_1-x_2+x_3=9.\end{cases}$
2.22	$\begin{cases}2x_1-3x_2+x_3=9,\\x_1+3x_3=-6,\\5x_1+2x_2-4x_3=-16.\end{cases}$	2.27	$\begin{cases}x_1-2x_2+4x_3=3,\\3x_1-6x_2+x_3=-2,\\2x_1+x_2-6x_3=2.\end{cases}$

2.23	$\begin{cases} x_1+4x_2-x_3=-9, \\ 3x_2-7x_3=-6, \\ 4x_1-x_2+5x_3=-2. \end{cases}$	2.28	$\begin{cases} x_1-6x_2-2x_3=-1, \\ 2x_1+3x_2+4x_3=1, \\ 4x_1-3x_2+8x_3=-1. \end{cases}$
2.24	$\begin{cases} 2x_1+3x_2-4x_3=12, \\ 3x_1-2x_2-5x_3=5, \\ x_1-2x_2+3x_3=-1. \end{cases}$	2.29	$\begin{cases} 2x_1-3x_2+3x_3=8, \\ 3x_1+2x_2+2x_3=8, \\ 4x_1+x_2-6x_3=21. \end{cases}$
2.25	$\begin{cases} -3x_1+5x_2+6x_3=-8, \\ x_1-4x_2-2x_3=-9, \\ 3x_1+x_2+x_3=-4. \end{cases}$	2.30	$\begin{cases} 3x_1+2x_2+2x_3=1, \\ 6x_1+4x_2-2x_3=5, \\ x_1+4x_2-x_3=2. \end{cases}$

Задание №3.

Найти пределы функций

3.1	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-5x+2}{7x^3-2x^2+4}$	б) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2+2x-15}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$	в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos7x}{x^2}$	г) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x-4}{x+3})^{3x}$
3.2	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-4x+1}{4x^3+7x}$	б) $\lim\limits_{x\to-4}\frac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+x-12}$	в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin5x-\sin x}{3x}$	г) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{2x+5}{2x-1})^{3-x}$
3.3	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^4-3x^2+6}{2x^4-x^3+x}$	б) $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^2+2x-3}{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}$	в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos5x-\cos x}{3x^2}$	г) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{4x+3}{4x-1})^{2x-3}$
3.4	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+5}{7x^2+3x-4}$	б) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2+3x+2}$	в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{tg3x}$	г) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{5x-1}{5x+4})^{2x+4}$
3.5	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3-x^2+17x}{5x^3+3x-1}$	б) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{4+x}}{x^2+5x-6}$	в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{tgx-\sin x}{2x^3}$	г) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{3x-1}{3x-4})^{2x}$
3.6	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-7x+3}{2x^2-5x-3}$	б) $\lim\limits_{x\to2}\frac{3x^2-2x-8}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$	в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin3x}{\sin5x}$	г) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{2x-7}{2x-3})^{4x+1}$
3.7	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4+5x^2}{x^4+5x+1}$	б) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{2x^2-5x-7}{\sqrt{x+3}-\sqrt{5+3x}}$	в) $\lim\limits_{x\to1}(x-1)\cdot tg\frac{\pi x}{2}$	г) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x-2}{x+3})^{4-x}$
3.8	а) $\lim\limits_{x\to x}\frac{5x^2-4x+3}{2x^2+7x+3}$	б) $\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}{2x^2-7x-4}$	в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\pi-2x}{1-\sin x}$	г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x+4}\right)^{1-2x}$
3.9	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x^2-5x+2}{3x^2+x-7}$	б) $\lim\limits_{x\to5}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{2x^2-9x-5}$	в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{tg3x-\sin3x}{x^3}$	г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x+4}\right)^{1-2x}$
3.10	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3-3x^2+10}{7x^3+5x+2}$	б) $\lim\limits_{x\to5}\frac{3x^2-75}{\sqrt{3x+17}-\sqrt{2x+22}}$	в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cdot tgx}{1-\cos^2x}$	г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{4x-3}\right)^{4x+1}$
3.11	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2-5x+7}{2x^2+x+3}$	б) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+1}-1}$	в) $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sin(x-20}{x^3-8}$	г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{2x+5}\right)^{1-3x}$
3.12	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4+x+1}{2x^4+x^3+2x}$	б) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{9-x}-\sqrt{x+9}}{x}$	в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^25x-\sin^2x}{x^2}$	г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{4x+1}\right)^{2x-3}$

3.13	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3+2x+9}{2x^3-4x^2-1}$	б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}$	в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 8x}$	г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{3x-2}\right)^{6x+1}$
3.14	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+7x-3}{3x^2-x+1}$	б) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x}-2}$	в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{3x^2}$	г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{2x+8}\right)^{4x-5}$
3.15	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+7x+2}{3x^3-x+4}$	б) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt{8-x}-3}{\sqrt{x+5}-2}$	в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos 4x}{2x^2}$	г) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x-2}{x+3})^{4-x}$
3.16	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+5x}{8-3x-9x^2}$	б) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{x+4}-3}$	в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg 3x}{tg 2x}$	г) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{3x-1}{3x+9})^{2-x}$
3.17	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+5x}{8-3x-9x^2}$	б) $\lim\limits_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-3}{\sqrt{x-3}-2}$	в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x-tg 2x}{3x^2}$	г) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+3}{x-2})^{x}$
3.18	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^2-4x+5}{2-3x+4x^2}$	б) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{5x-6}-3}{x^2-9}$	в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\sin 2x}{\pi-4x}$	г) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{2x-1}{2x+2})^{x}$
3.19	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^4+4x^2-2}{2x^4-5}$	б) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{5x+1}-4}{x^2-5x+6}$	в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 4x-\cos^3 4x}{5x^2}$	г) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{4x}{4x+1})^{2x}$
3.20	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+1}{1+5x+2x^2}$	б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{5x^2}$	в) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sin(x+1)}{x^2-1}$	г) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x-2}{x+3})^{4-x}$
3.21	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^3-3x}{x^3+4x-2}$	б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+16}-4}{\sqrt{x^2+4}-2}$	в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-\cos^2 2x}{x^2}$	г) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x}{x-2})^{2x}$
3.22	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+4x-x^4}{x-5x^2+2x^4}$	б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}}$	в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-x}{\arcsin 3x}$	г) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{4x+8}{4x-9})^{3x}$
3.23	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-5x^2+3}{16x^3-7x+1}$	б) $\lim\limits_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{2x+7}-5}$	в) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sin(x-3)}{27-x^3}$	г) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{3x+1}{3x-4})^{2x}$
3.24	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-14x^2+3x}{7x^2+5x+1}$	б) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{6x+1}-5}{2-\sqrt{x}}$	в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos 4x}$	г) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{2x-1}{2x+5})^{3x-4}$
3.25	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-2x^2+x}{2-x^2+5x^4}$	б) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{3x}-x}{x^3-27}$	в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 5x-\cos x}{3x^2}$	г) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{3x-1}{3x+4})^{2x+7}$
3.26	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4-2x^2+7}{3x^4-3x+2}$	б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2-5x^3}$	в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x+\sin 5x}$	г) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{4x}{4x+8})^{5+2x}$
3.27	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2+2x+3}{2-3x+2x^2}$	б) $\lim\limits_{x\to -4}\frac{x^3+64}{\sqrt{x+20}-4}$	в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^4 2x}{x^4}$	г) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{2x+3}{2x-1})^{x-1}$
3.28	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+5x+1}{5x^2-x+4}$	б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+8}-3}{x^2-1}$	в) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{tgx})$	г) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{3x+1}{3x-1})^{3x-1}$
3.29	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3-7x+3}{4-x^3+2x^2}$	б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$	в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos^3 x-\cos x}{5x^2}$	г) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{2x-1}{2x+3})^{4+x}$
3.30	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4-2x^2-3x^5}{x^5+2x+8}$	б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{4-\sqrt{x+16}}$	в) $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{2x^2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1})$	г) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{3x-2}{3x+3})^{4-x}$

Задание №4.

Вычислить производные функций

4.1	а) $y=\sqrt[3]{x^7}+\frac{3}{x^7}-4x^6+\frac{4}{x}$	б) $y=(x^3+4x)\cdot tg^2 3x$	в) $\sin(x-2y)+\frac{x^3}{y}=7x$
4.2	а) $y=\sqrt{x^7}+\frac{7}{x^4}+3x^6+\frac{5}{x}$	б) $y=(x-2)^4\cdot\sin 6x$	в) $e^{xy}+\frac{y}{x}=cos3x$
4.3	а) $y=4\sqrt{x}-\frac{8}{x^2}+5x^3+\frac{1}{x}$	б) $y=(2x-x^2)\cdot tg^4 x$	в) $x^3y^2-\frac{x+1}{y}=arcsin4x$
4.4	а) $y=3\sqrt{x}-\frac{4}{x^3}+2x^5+\frac{6}{x}$	б) $y=(4x-x^2)\cdot tg^4 x$	в) $\frac{y-2}{x^3}-tg(x+5y)=7^x$
4.5	а) $y=\sqrt[5]{x^3}-\frac{6}{x^3}+3x^4-\frac{2}{x}$	б) $y=(x^2+3x)\cdot tg\sqrt{x}$	в) $arctgy=4x+5y$
4.6	а) $y=7\sqrt{x^5}-\frac{2}{x^5}-3x^4+\frac{6}{x}$	б) $y=\cos^3 5x-x\sin 3x$	в) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=1$
4.7	а) $y=\sqrt[5]{x^2}+\frac{2}{x^4}-3x^6+\frac{4}{x}$	б) $y=\cos 2x\cdot ctg(x^2)$	в) $lny-\frac{y}{x}=7$
4.8	а) $y=8x^2+\frac{6}{x^3}+\sqrt[6]{x^5}+\frac{5}{x}$	б) $y=(-4x^4+3x^3-2x^2)\cdot\cos 7x$	в) $siny=7x+3y$
4.9	а) $y=5x^2+\frac{4}{x^3}-\sqrt[3]{x^4}-\frac{3}{x}$	б) $y=(x-7)^6\cdot ctg3x$	в)$xy^2-y^3=4x-5$
4.10	а) $y=3x^5+\frac{10}{x^5}+\sqrt{x^5}-\frac{4}{x}$	б) $y=(x+5x)^3\cdot\sin^2 x$	в)$x^4+x^2y^3+y=4$
4.11	а) $y=5x^3-\frac{8}{x^2}+8\sqrt{x}+\frac{1}{x}$	б) $y=(2x-1)^3\cdot(2-\sin x)$	в) $y^2=x+ln\frac{y}{x}$
4.12	а) $y=4x^4-\frac{3}{x}-\sqrt[5]{x^2}+\frac{6}{x^2}$	б) $y=(3x-9)^2\cdot\cos\sqrt{x}$	в) $4sin^2(x+y)=x$
4.13	а) $y=2\sqrt{x^3}-6x^2+\frac{2}{x^5}+\frac{7}{x}$	б) $y=(x^2-9x+7)\cdot\sin 7x$	в) $xy=ctgy$
4.14	а) $y=6x^4-\frac{5}{x}-8\sqrt[3]{x^7}+\frac{7}{x^2}$	б) $y=\sin 6x\cdot\cos^2 4x$	в) $x^3+y^2=5x$
4.15	а) $y=4x^3-\frac{3}{x}-\sqrt[3]{x^5}+\frac{2}{x^4}$	б) $y=(x^2-3x+1)\cdot\ln(x-3)$	в) $y^2=\frac{x-y}{x+y}$
4.16	а) $y=4x^5-\frac{5}{x}-\sqrt{x^7}+\frac{2}{x^6}$	б) $y=\ln(x+4)\cdot tg2x$	в) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{7}$
4.17	а) $y=\frac{7}{x}+\frac{4}{x^3}-2x^6-\sqrt[3]{x^5}$	б) $y=\sin 6x\cdot\sqrt{x^2-1}$	в) $sin^2(3x+y^2)=5$
4.18	а) $y=-\frac{3}{x}+\frac{6}{x^4}+3x^3-\sqrt{x^7}$	б) $y=\cos^2 x\cdot\sqrt[3]{6x+1}$	в) $siny=x\,y^2+5$
4.19	а) $y=-\frac{4}{x}-\frac{7}{x^4}+8x^3+\sqrt{x^7}$	б) $y=tg^2 x\cdot(2x-5)^3$	в) $ctg^2(x+y)=5x$
4.20	а) $y=8x^5-\frac{5}{x^4}+\frac{1}{x}-\sqrt[4]{x^5}$	б) $y=\ln(3x-1)\cdot\sqrt{(x+1)^5}$	в) $y=x+arctgy$
4.21	а) $y=\frac{4}{x^5}-\frac{3}{x}+3x^4+\sqrt[4]{x^6}$	б) $y=\sin 2x\cdot tg^3 x$	в) $y^2=25x-4$
4.22	а) $y=4x^3+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^4}-\sqrt[3]{x^2}$	б) $y=\sin 6x\cdot\sqrt[5]{(x+4)^2}$	в) $y^2-x=cosy$

4.23	а) $y=7x^4+\frac{3}{x}+\frac{8}{x^6}-\sqrt[7]{x^4}$	б) $y=ctg4x\cdot\sqrt{(3x+6)^3}$	в) $y=e^y+4x$
4.24	а) $y=\sqrt[6]{x^5}+\frac{4}{x}-\frac{4}{x^5}-5x^3$	б) $y=\sin^3 4x\cdot\cos^2 x$	в) $y^2+x^2=siny$
4.25	а) $y=2x^2\sqrt{x}-\frac{4}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{4}x^4+x$	б) $y=e^{2x}\cdot\cos 6x$	в) $y=7x-ctgy$
4.26	а) $y=9x^5+\frac{4}{\sqrt{x}}-\frac{7}{x^4}+\sqrt[7]{x^3}$	б) $y=\sin 3x\cdot(x^4+3x^2)$	в) $3y=7+xy^3$
4.27	а) $y=8x+\frac{7}{\sqrt[3]{x^4}}-\frac{4}{x^2}-\sqrt[7]{x}$	б) $y=tg3x\cdot(4-3x)^2$	в) $x^4+x^2y^2+y=4$
4.28	а) $y=3x^2-\frac{4}{x}-\frac{4}{x^2}+x\sqrt[6]{x^5}$	б) $y=tg\sqrt{x}\cdot\cos 8x$	в) $5y=8x-tgy$
4.29	а) $y=5x^3+\frac{6}{x}+\frac{6}{x^2}-\sqrt[3]{x^8}$	б) $y=e^{4x+1}\cdot(2x+1)^2$	в) $3y=e^{3y}+3x$
4.30	а) $y=\frac{1}{3}x^6+\frac{6}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^6}+2\sqrt[6]{x^5}$	б) $y=\sin^2 x-(4x+1)\cdot\cos 6x$	в) $y=7x+\sqrt{\frac{x}{y}}$

Задание №5.

Вычислить неопределенные интегралы функций

5.1	а) $\int(3x^6+\frac{4}{x}+\sqrt[5]{x^2}-\frac{2}{x^4})dx$	б) $\int\frac{\ln x}{x^2}dx$	в)$\int e^{-x^3}.x^2dx$
5.2	а) $\int(5x^3+\frac{1}{x}+4\sqrt{x}-\frac{8}{x^2})dx$	б) $\int(2x-3)\sin 4xdx$	в)$\int(8cosx-5)^2sinxdx$
5.3	а) $\int(3x^4-\frac{2}{x}+\sqrt[5]{x^3}-\frac{4}{x^3})dx$	б) $\int x\cdot\sin(2x-3)dx$	в)$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^6-4}}$
5.4	а) $\int(-3x^4+\frac{4}{x}+7\sqrt{x^5}-\frac{2}{x^5})dx$	б) $\int(x^2+x)e^xdx$	в)$\int\frac{x+8}{x^2+3}dx$
5.5	а) $\int(6x^3-\frac{5}{x}+3\sqrt{x^5}-\frac{7}{x^4})dx$	б) $\int x(\cos(4x+3))dx$	в)$\int\frac{ln^3x}{3x}dx$
5.6	а) $\int(2x^5-\frac{4}{x^3}+\frac{6}{x}+3\sqrt{x})dx$	б) $\int(3x+1)\cos 2xdx$	в)$\int\frac{sinlnx}{x}dx$
5.7	а) $\int(2\sqrt{x^3}-\frac{7}{x}+6x^2-\frac{2}{x^5})dx$	б) $\int(x-7)e^{2x}dx$	в)$\int cos^2x\ sinxdx$
5.8	а) $\int(6x^5+\frac{5}{x}-\frac{7}{x^6}-\sqrt[3]{x^7})dx$	б) $\int(x-4)\cos 3xdx$	в)$\int e^{sinx}cosxdx$
5.9	а) $\int(4x^5+\frac{3}{x}-\sqrt[5]{x^3}-\frac{2}{x^4})dx$	б) $\int(2x-5)e^xdx$	в)$\int\frac{lnx}{x}dx$
5.10	а) $\int(3x^8+\frac{4}{x}-\sqrt[4]{x^3}-\frac{2}{x^5})dx$	б) $\int\ln(x+2)dx$	в)$\int\frac{sinx}{\sqrt{1+6cosx}}dx$
5.11	а) $\int(4x^2-\frac{3}{x}-\sqrt{x^7}+\frac{3}{x^6})dx$	б) $\int(3x+4)\sin xdx$	в)$\int\frac{sinx}{cos^2x}dx$
5.12	а) $\int(8x^3+\frac{6}{x^4}-\sqrt[6]{x^5}+\frac{7}{x^3})dx$	б) $\int(4x-3)\cos 2xdx$	в)$\int sin^3x\ cosxdx$
5.13	а) $\int(5x^2-\sqrt[3]{x^4}+\frac{4}{x^3}-\frac{3}{x})dx$	б) $\int x\sin(3x+5)dx$	в)$\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$
5.14	а) $\int(3x^5-\frac{4}{x}-\sqrt{x^5}+\frac{10}{x^5})dx$	б) $\int(8x-2)\cos 4xdx$	в)$\int\frac{dx}{xln^4x}dx$

5.15	а) $\int (5x^4 - \frac{8}{x^2} + 4\sqrt{x} - \frac{1}{x})dx$	б) $\int (4x-1)e^{-x}dx$	в)$\int x^2 e^{x^3}\,dx$
5.16	а) $\int (4x^6 - \frac{3}{x} - \sqrt[5]{x^7} + \frac{6}{x^2})dx$	б) $\int (x+3)\sin xdx$	в)$\int \frac{cosx}{sin^4x}dx$
5.17	а) $\int (\sqrt[4]{x^6} - \frac{5}{x} + \frac{4}{x^5} + 3x^4)dx$	б) $\int (2x+4)\cos 6xdx$	в)$\int \frac{dx}{(4-5x)^5}$
5.18	а) $\int (8x^5 - \frac{4}{x^4} + \frac{3}{x} - \sqrt[4]{x^5})dx$	б) $\int (x-6)\sin\frac{x}{2}dx$	в)$\int \sqrt[7]{sinx+1}\,cosx\,dx$
5.19	а) $\int (\frac{7}{x} + \frac{4}{x^3} - 2x^6 - \sqrt[3]{x^5})dx$	б) $\int (x+3)\cos 6xdx$	в)$\int \frac{x^2dx}{\sqrt[6]{7-x^3}}$
5.20	а) $\int (\frac{6}{x^4} - \frac{3}{x} + 3x^3 - \sqrt{x^7})dx$	б) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$	в)$\int \frac{xdx}{(5-3x)^7}$
5.21	а) $\int (8x^3 - \frac{6}{x^4} - \frac{4}{x} + \sqrt[9]{x^2})dx$	б) $\int (4x-5)e^{\frac{x}{2}}dx$	в)$\int \frac{tgx}{cos^2x}dx$
5.22	а) $\int (4x^3 + \frac{3}{x} - \frac{3}{x^4} - \sqrt[5]{x^4})dx$	б) $\int (6x+1)\cos\frac{x}{2}dx$	в)$\int sinx\,e^{cosx}dx$
5.23	а) $\int (7x^4 + \frac{4}{x} + \frac{8}{x^6} - \sqrt[6]{x^5})dx$	б) $\int (2x-8)\sin xdx$	в)$\int x\sqrt{x^2-4}dx$
5.24	а) $\int (\sqrt[4]{x^3} + \frac{5}{x} - \frac{6}{x^5} - 5x^4)dx$	б) $\int \sqrt{x}\cdot\ln(x)dx$	в)$\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$
5.25	а) $\int (3\sqrt{x} + \frac{4}{x^5} + 6\sqrt[3]{x^2} - \frac{7}{x})dx$	б) $\int (8-x)e^{-2x}dx$	в)$\int (cosx-3)^3 sinx\,dx$
5.26	а) $\int (9x^5 - \frac{5}{x^4} - \frac{6}{x} + 5\sqrt[3]{x^7})dx$	б) $\int (x+\frac{1}{2})\sin\frac{x}{4}dx$	в)$\int 3x^4\,e^{x^3}dx$
5.27	а) $\int (\frac{3}{x^3} + \frac{8}{x} - 2\sqrt{x^3} + 5x^4)dx$	б) $\int (x-\frac{1}{4})\cos\frac{x}{8}dx$	в)$\int \frac{\sin(lnx)}{x}dx$
5.28	а) $\int (4\sqrt[4]{x^3} - \frac{6}{x} - \frac{4}{x^5} + 3x^7)dx$	б) $\int \ln(x+4)dx$	в)$\int \frac{arctg^3x}{1+x^2}dx$
5.29	а) $\int (10x^4 - \frac{5}{x^4} - \frac{4}{x} + 3\sqrt{x^5})dx$	б) $\int (2x+3)e^{4x}dx$	в)$\int \frac{e^{arctgx}}{1+x^2}dx$
5.30	а) $\int (5x^3 + \frac{6}{x^3} - \frac{6}{x^5} + \sqrt[3]{x^8})dx$	б) $\int (x+2)\cos\frac{x}{4}dx$	в)$\int \frac{ln^2x+1}{x}dx$

Задание №6. Найдите общее или частное решение следующих дифференциальных уравнений.

6.1	а) $y'' - 10y' + 25y = 0$	б) $y'' + 3y' + 2y = 0$	в)$xdy - (y+1)dx = 0, y(2) = 5$
6.2	а) $y'' - y' - 2y = 0$	б) $y'' + 4y' + 4y = 0,$ $y(0)=1,\ y'(0) = 2$	в) $y' - ytgx = \frac{1}{cos^2x}$
6.3	а) $y'' - 3y' + 2y = 0$	б) $y'' - 4y' + 13y = 0,$ $y(0)=3,\ y'(0) = 1$	в) $y' + \frac{2y}{x} = x^3$
6.4	а) $y'' + 2y' + 17y = 0$	б) $y'' - y' - 12y = 0,$ $y(1)=1,\ y'(0) = 2$	в) $(x^2 - 2y^2)dx + 2xydy = 0$
6.5	а) $y'' - 12y' + 36y = 0$	б) $y'' + 2y' - 3y = 0,$ $y(1)=3,\ y'(0) = 1$	в) $xy' + 5y = 10x - 4$
6.6	а) $y'' - y' - 12y = 0$	б) $y'' - 6y' + 10y = 0,$ $y(0)=2,\ y'(1) = 2$	в) $y' + 2xy = x\cdot e^{-x^2}$

6.7	а) $y''-6y'+5y=0$	б) $y''+2y'+5y=0$, $y(1)=1,\ y'(0)=3$	в) $y'+\frac{2y}{x+1}=(x+1)^2$
6.8	а) $y''-3y'+2y=0$	б) $y''-2y'+10y=0$, $y(0)=1,\ y'(0)=2$	в) $y'-\frac{4y}{x}=-x^2+2x-3$
6.9	а) $y''-5y'+4y=0$	б) $y''-3y'+2y=0$, $y(1)=1,\ y'(1)=2$	в) $y'+\frac{2y}{x+1}=(x+1)^2$
6.10	а) $y''-6y'+8y=0$	б) $y''+4y'+5y=0$, $y(0)=4,\ y'(1)=2$	в) $(x^2+y^2)dx-2x^2dy=0$
6.11	а) $y''+8y'+16y=0$	б) $y''-6y'+9y=0$, $y(0)=3,\ y'(1)=2$	в) $x^2y'-2xy=1$
6.12	а) $y''-3y'-10y=0$	б) $y''-5y'+6y=0$	в) $(1+y^2)dx-xydy=0, y(2)=1$
6.13	а) $9y''+6y'+y=0$	б) $y''-4y'-21y=0$	в) $(1+2x)dy+y^2dx=0, y(4)=1$
6.14	а) $y''-6y'+9y=0$	б) $y''+6y'-7y=0$, $y(0)=4,\ y'(0)=1$	в) $y'-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^{\frac{5}{2}}$
6.15	а) $y''-10y'+21y=0$	б) $y''+2y'-24y=0$	в) $xy'+y-e^x=0, y(1)=1$
6.16	а) $y''+6y'+9y=0$	б) $y''-8y'+7y=0$, $y(1)=1,\ y'(2)=2$	в) $y'-4y=e^{2x}$
6.17	а) $y''-14y'+49y=0$	б) $y''+y'-12y=0$, $y(1)=1,\ y'(0)=2$	в) $y'-\frac{xy}{x^2+1}=x$
6.18	а) $y''-7y'-8y=0$	б) $y''+4y'+13y=0$, $y(1)=1,\ y'(0)=1$	в) $y'-\frac{2x}{x^2+1}y=1+x^2$
6.19	а) $y''+14y'+49y=0$	б) $y''-4y'+5y=0$, $y(0)=1,\ y'(0)=2$	в) $y'-ytgx=\frac{2x}{cosx}$
6.20	а) $y''-8y'+16y=0$	б) $y''-10y'+16y=0$, $y(1)=1,\ y'(1)=2$	в) $y'-\frac{2x}{x^2+1}y=2x(1+x^2)$
6.21	а) $y''-3y'-18y=0$	б) $y''-16y'+64y=0$, $y(0)=1,\ y'(0)=2$	в) $y'cosx+ysinx=1$
6.22	а) $y''-18y'+81y=0$	б) $y''-12y'+40y=0$, $y(0)=1,\ y'(0)=3$	в) $xy'-4y=x^2\sqrt{y}$
6.23	а) $y''+6y'+25y=0$	б) $y''+4y'-12y=0$, $y(1)=1,\ y'(1)=2$	в) $(2\sqrt{xy}-x)dy+ydx=0$
6.24	а) $4y''+4y'+y=0$	б) $y''+2y'+y=0$, $y(0)=1,\ y'(0)=2$	в) $x^2dy=(xy+y^2)dx$
6.25	а) $y''-8y'+12y=0$	б) $y''+18y'+81y=0$, $y(0)=1,\ y'(0)=4$	в) $xy^2dy=(x^3+y^3)dx$
6.26	а) $y''-18y'+82y=0$	б) $y''-4y'+4y=0$, $y(1)=1,\ y'(0)=1$	в) $y'+ytgx=\frac{1}{cosx}$
6.27	а) $y''-6y'+10y=0$	б) $y''-20y'+100y=0$, $y(0)=5,\ y'(0)=2$	в) $y'-\frac{x}{x^2+1}y=\frac{2}{x^2+1}$
6.28	а) $9y''+3y'-2y=0$	б) $y''+2y'+37y=0$, $y(0)=1,\ y'(0)=2$	в) $y'-\frac{3y}{x}=e^xx^3$
6.29	а) $6y''+7y'-3y=0$	б) $4y''-4y'+y=0$,	в) $y'+\frac{2y}{x}=\frac{1}{x^2}$

		$y(0)=1,\ y'(0)=3$	
6.30	а) $y''-12y'+40y=0$	б) $y''+12y'+36y=0$, $y(1)=1,\ y'(0)=2$	в) $y'-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^2$

Задание №7.Исследовать сходимость числовых рядов:

7.1	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^3}$	б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$	в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{n^2(n+1)}$
7.2	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot\sqrt{n}}{n!}$	б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)Ln(n+1)}$	в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{(3n-2)^2}$
7.3	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{(n+2)!}$	б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^4+3}$	в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n-1}{\sqrt{n^4}+n}$
7.4	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+1}{4^n}$	б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+4)\sqrt{n}}$	в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{7^n}{3(n+1)}$
7.5	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+2)}{4^n}$	б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^4+1}$	в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^2+1}{n^3}$
7.6	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{\sqrt{n}\cdot n!}$	б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5n^3+2}$	в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{n(n+1)}$
7.7	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n\cdot n^4}{n!}$	б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\sqrt{n}}$	в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2+1}{n}$
7.8	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{5^n(2n+1)}$	б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+3}$	в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3^n}{4(n+3)}$
7.9	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+3}{6^n}$	б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+n^2}{n^4+1}$	в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{4n^2-1}$
7.10	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{(n+2)!}$	б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+2n}}$	в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3n+1}{\sqrt{n^3}+2n}$
7.11	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+7}{8^n}$	б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{n^3+6}$	в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+4}{\sqrt{n}+n}$
7.12	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+7}{(n+1)!}$	б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+5}$	в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{n^3(n-1)}$
7.13	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{7^n(3n+1)}$	б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)Ln^2(n+1)}$	в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{(n-2)^2(n+1)}$
7.14	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3n+1}{4^n}$	б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+2}$	в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{2n^2(n-1)}$
7.15	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+3}{6^n}$	б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+1}{n^4\sqrt{n}}$	в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4^n}{5(n+1)}$
7.16	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+4}{2^n}$	б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n\sqrt{n}+3}$	в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4n+2}{\sqrt{n}+4n}$
7.17	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{7^n\cdot n^4}$	б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^6+5}}$	в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+2}{n^2+4n+1}$

7.18	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7n+1}{5^n}$	б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6n+\sqrt{n}}$	в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{2n^2+3}$
7.19	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{(n+1)!}$	б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+6}{n^4+1}$	в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{2n-1}$
7.20	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)^4}{6^n}$	б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+1}{n^3+2}$	в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+2}\frac{1}{n!}$
7.21	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{5^n\cdot n^2}$	б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ln(n+2)}$	в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{2^n}$
7.22	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\sqrt{n+1}}{(n+2)!}$	б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+7}{\sqrt{n^5+3}}$	в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$
7.23	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+3}{5^n}$	б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n+\sqrt{n}}$	в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln(n+1)}$
7.24	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{4^n(6n+5)}$	б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n^3+3}$	в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{2^n}$
7.25	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{n\cdot(n-2)!}$	б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)Ln^3(n+1)}$	в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{\sqrt{n-2}}$
7.26	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+7n}{6^n}$	б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{n\sqrt{n}+1}$	в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3n+1}{2n^2-2}$
7.27	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}6^n}{(n+1)!}$	б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n+1)(3n+2)}$	в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{n!}$
7.28	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+4}{2^n}$	б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^6+8}}$	в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{\sqrt{n+2}}$
7.29	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3n+2}{7^n}$	б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+5}{(n+3)^3}$	в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3n+1}{3n^2-n+1}$
7.30	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\sqrt{n}}{(n+3)!}$	б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6\sqrt{n}}$	в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{3^n}$

12. ЛИТЕРАТУРА

1. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс, в двух частях. М.:«Айрис Пресс», 2014г.
2. Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов. М.: Наука, 1990 г.
3. Булдык Г. М. Сборник задач и упражнений по высшей математике. Мн. Юнипресс,2002 г.
4. Гусак А.А. Справочное пособие к решению задач по высшей математике. Мн.: ТетраСистемс, 1998 г.
5. Богомолов Н. В. Практические занятия по высшей математике. М. Высшая школа.2000 г.
6. Индивидуальные задания по высшей математике, в четырех частях, под редакцией А. П. Рябушко. Мн. «Высшая школа», 2013 г.